从矩阵的相抵谈起

林 亚 南

厦门大学 数学科学学院

2008年10月 福州

目录

设F是一个数域，$A, B \in F^{m\times n}$．称A相抵于B，如果A可以经过一系列行的和列的初等变换化为A，等价地，如果存在可逆矩阵$P \in F^{m\times m}$，$Q \in F^{n\times n}$，使得$A = PBQ$.

等价关系与等价分类

定义1 给定集合$\mathcal{S}$, 设集合$\{\mathcal{S}_i|i\in I\}$, I为有限或无限集, 是集合$\mathcal{S}$的子集族, 若满足:

(1) $\mathcal{S}=\bigcup\limits_{i\in I}\mathcal{S}_i$;

(2) $\mathcal{S}_i\bigcap\mathcal{S}_j=\emptyset(i\neq j, i,j\in I)$.

则称$\{\mathcal{S}_i|i\in I\}$是$\mathcal{S}$的一个分类, $\mathcal{S}_i$称为$\mathcal{S}$的一个类.

定义2 设$\mathcal{S}$是一个集合, $\mathcal{T}$是$\mathcal{S}\times\mathcal{S}$的子集. 则我们称$\mathcal{T}$定义了$\mathcal{S}$的一个二元关系, 记为$\sim$. 对于任意$(x,y)\in\mathcal{S}\times\mathcal{S}$, 若$(x,y)\in T$, 则称$x$和$y$有关系, 记为$x\sim y$; 若$(x,y)\notin\mathcal{T}$, 则称$x$和$y$没有关系, 记为$x\nsim y$.

定义3 集合$\mathcal{S}$的一个二元关系"$\sim$"称为$\mathcal{S}$的一个等价关系, 如果满足:

(1) 反身性: 对于任意的$x\in\mathcal{S}$, 有$x\sim x$;

(2) 对称性: 若$x\sim y$, 则$y\sim x$;

(3) 传递性: 若$x\sim y$, $y\sim z$, 则$x\sim z$.

命题1 集合$\mathcal{S}$的一个分类决定$\mathcal{S}$的一个等价关系.

证明 设$\{\mathcal{S}_i \mid i \in I\}$是$\mathcal{S}$的一个分类, 定义关系$x \sim y :\Longleftrightarrow$ x与y在同一个类中. 下面证明此为等价关系.

(1) 对于任意的$x \in \mathcal{S}$, 存在$i \in I$使得$x \in \mathcal{S}_i$. x和x在一类中, 所以即$x \sim x$;

(2) 若$x \sim y$, 即x和y在同一类中, 所以y与x属于同一类, 因此$y \sim x$;

(3) 若$x \sim y$, $y \sim z$, 即x和y属于同一类, y和z属于同一类. 所以x, y, z属于同一类. 故$x \sim y$.

命题1 集合$\mathcal{S}$的一个分类决定$\mathcal{S}$的一个等价关系.

证明 设$\{\mathcal{S}_i \mid i \in I\}$是$\mathcal{S}$的一个分类, 定义关系$x \sim y :\Longleftrightarrow x$与$y$在同一个类中. 下面证明此为等价关系.

(1) 对于任意的$x \in \mathcal{S}$, 存在$i \in I$使得$x \in \mathcal{S}_i$. x和x在一类中, 所以即$x \sim x$;

(2) 若$x \sim y$, 即x和y在同一类中, 所以y与x属于同一类, 因此$y \sim x$;

(3) 若$x \sim y$, $y \sim z$, 即x和y属于同一类, y和z属于同一类. 所以x, y, z属于同一类. 故$x \sim y$.

命题1 集合$\mathcal{S}$的一个分类决定$\mathcal{S}$的一个等价关系.

证明 设$\{\mathcal{S}_i \mid i \in I\}$是$\mathcal{S}$的一个分类, 定义关系$x \sim y :\Longleftrightarrow x$与$y$在同一个类中. 下面证明此为等价关系.

(1) 对于任意的$x \in \mathcal{S}$, 存在$i \in I$使得$x \in \mathcal{S}_i$. x和x在一类中, 所以即$x \sim x$;

(2) 若$x \sim y$, 即x和y在同一类中, 所以y与x属于同一类, 因此$y \sim x$;

(3) 若$x \sim y$, $y \sim z$, 即x和y属于同一类, y和z属于同一类. 所以x, y, z属于同一类. 故$x \sim y$.

命题1 集合$\mathcal{S}$的一个分类决定$\mathcal{S}$的一个等价关系.

证明 设$\{\mathcal{S}_i \mid i \in I\}$是$\mathcal{S}$的一个分类, 定义关系$x \sim y :\Longleftrightarrow$ x与y在同一个类中. 下面证明此为等价关系.

(1) 对于任意的$x \in \mathcal{S}$, 存在$i \in I$使得$x \in \mathcal{S}_i$. x和x在一类中, 所以即$x \sim x$;

(2) 若$x \sim y$, 即x和y在同一类中, 所以y与x属于同一类, 因此$y \sim x$;

(3) 若$x \sim y$, $y \sim z$, 即x和y属于同一类, y和z属于同一类. 所以x, y, z属于同一类. 故$x \sim y$.

命题1 集合$\mathcal{S}$的一个分类决定$\mathcal{S}$的一个等价关系.

证明 设$\{\mathcal{S}_i \mid i \in I\}$是$\mathcal{S}$的一个分类, 定义关系$x \sim y :\Longleftrightarrow x$与$y$在同一个类中. 下面证明此为等价关系.

(1) 对于任意的$x \in \mathcal{S}$, 存在$i \in I$使得$x \in \mathcal{S}_i$. x和x在一类中, 所以即$x \sim x$;

(2) 若$x \sim y$, 即x和y在同一类中, 所以y与x属于同一类, 因此$y \sim x$;

(3) 若$x \sim y$, $y \sim z$, 即x和y属于同一类, y和z属于同一类. 所以x, y, z属于同一类. 故$x \sim y$.

命题2 集合$\mathcal{S}$的一个等价关系"$\sim$"决定$\mathcal{S}$的一个分类.

证明 对任意的$x\in\mathcal{S}$, 令$\mathcal{S}_x=\{y\mid y\in\mathcal{S}, y\sim x\}$. 下面验证此为$\mathcal{S}$的一个分类.

(1) 对于任意的$x\in\mathcal{S}$, 由于$x\sim x$, 即$x\in\mathcal{S}_x$. 故$\mathcal{S}$中任一元素必属于某一类, 即$\mathcal{S}=\bigcup\mathcal{S}_x$.

(2) 对于任意两类$\mathcal{S}_y$, $\mathcal{S}_z$, 或者$\mathcal{S}_y\bigcap\mathcal{S}_z=\emptyset$, 或者$\mathcal{S}_y=\mathcal{S}_z$. 事实上, 设$x\in\mathcal{S}_y\bigcap\mathcal{S}_z$, 则按定义有$x\sim y$, $x\sim z$. 由对称性知$y\sim x$, $x\sim z$, 再由传递性, 可得$y\sim z$. 故$y\in\mathcal{S}_z$. 进一步, 对于任意的$a\in\mathcal{S}_y$, 有$a\sim y$, $y\sim z$. 因此$a\sim z$. 即$\mathcal{S}_y\subseteq\mathcal{S}_z$. 同理$\mathcal{S}_z\subseteq\mathcal{S}_y$. 故$\mathcal{S}_y=\mathcal{S}_z$.

命题2 集合$\mathcal{S}$的一个等价关系"$\sim$"决定$\mathcal{S}$的一个分类.

证明 对任意的$x\in S$, 令$\mathcal{S}_x=\{y\mid y\in\mathcal{S}, y\sim x\}$. 下面验证此为$\mathcal{S}$的一个分类.

(1) 对于任意的$x\in\mathcal{S}$, 由于$x\sim x$, 即$x\in\mathcal{S}_x$. 故$\mathcal{S}$中任一元素必属于某一类, 即$\mathcal{S}=\bigcup\mathcal{S}_x$.

(2) 对于任意两类$\mathcal{S}_y$, $\mathcal{S}_z$, 或者$\mathcal{S}_y\bigcap\mathcal{S}_z=\emptyset$, 或者$\mathcal{S}_y=\mathcal{S}_z$. 事实上，设$x\in\mathcal{S}_y\bigcap\mathcal{S}_z$，则按定义有$x\sim y$, $x\sim z$. 由对称性知$y\sim x$, $x\sim z$, 再由传递性, 可得$y\sim z$. 故$y\in\mathcal{S}_z$. 进一步, 对于任意的$a\in\mathcal{S}_y$, 有$a\sim y$, $y\sim z$. 因此$a\sim z$. 即$\mathcal{S}_y\subseteq\mathcal{S}_z$. 同理$\mathcal{S}_z\subseteq\mathcal{S}_y$. 故$\mathcal{S}_y=\mathcal{S}_z$.

命题2 集合$\mathcal{S}$的一个等价关系"$\sim$"决定$\mathcal{S}$的一个分类.

证明 对任意的$x\in S$, 令$\mathcal{S}_x=\{y\mid y\in\mathcal{S}, y\sim x\}$. 下面验证此为$\mathcal{S}$的一个分类.

(1) 对于任意的$x\in\mathcal{S}$, 由于$x\sim x$, 即$x\in\mathcal{S}_x$. 故$\mathcal{S}$中任一元素必属于某一类, 即$\mathcal{S}=\bigcup\mathcal{S}_x$.

(2) 对于任意两类$\mathcal{S}_y$, $\mathcal{S}_z$, 或者$\mathcal{S}_y\bigcap\mathcal{S}_z=\emptyset$, 或者$\mathcal{S}_y=\mathcal{S}_z$. 事实上，设$x\in\mathcal{S}_y\bigcap\mathcal{S}_z$，则按定义有$x\sim y$, $x\sim z$. 由对称性知$y\sim x$, $x\sim z$, 再由传递性, 可得$y\sim z$. 故$y\in\mathcal{S}_z$. 进一步, 对于任意的$a\in\mathcal{S}_y$, 有$a\sim y$, $y\sim z$. 因此$a\sim z$. 即$\mathcal{S}_y\subseteq\mathcal{S}_z$. 同理$\mathcal{S}_z\subseteq\mathcal{S}_y$. 故$\mathcal{S}_y=\mathcal{S}_z$.

命题2 集合$\mathcal{S}$的一个等价关系"$\sim$"决定$\mathcal{S}$的一个分类.

证明 对任意的$x\in S$, 令$\mathcal{S}_x=\{y\mid y\in\mathcal{S}, y\sim x\}$. 下面验证此为$\mathcal{S}$的一个分类.

(1) 对于任意的$x\in\mathcal{S}$, 由于$x\sim x$, 即$x\in\mathcal{S}_x$. 故$\mathcal{S}$中任一元素必属于某一类, 即$\mathcal{S}=\bigcup\mathcal{S}_x$.

(2) 对于任意两类$\mathcal{S}_y$, $\mathcal{S}_z$, 或者$\mathcal{S}_y\bigcap\mathcal{S}_z=\emptyset$, 或者$\mathcal{S}_y=\mathcal{S}_z$. 事实上，设$x\in\mathcal{S}_y\bigcap\mathcal{S}_z$，则按定义有$x\sim y$, $x\sim z$. 由对称性知$y\sim x$, $x\sim z$, 再由传递性, 可得$y\sim z$. 故$y\in\mathcal{S}_z$. 进一步, 对于任意的$a\in\mathcal{S}_y$, 有$a\sim y$, $y\sim z$. 因此$a\sim z$. 即$\mathcal{S}_y\subseteq\mathcal{S}_z$. 同理$\mathcal{S}_z\subseteq\mathcal{S}_y$. 故$\mathcal{S}_y=\mathcal{S}_z$.

$F^{m\times n}$中的相抵关系

《高等代数》课程中的等价关系有:

$F^{m\times n}$中的相抵关系;

$F^{n\times n}$中的相似关系;

$\mathbb{R}^{n\times n}$中的正交相似关系;

$F^{n\times n}$中全体对称矩阵的合同关系;

F上所有线性空间的同构关系;

线性空间V的向量组的等价关系.

$F^{m\times n}$中的相抵关系

《高等代数》课程中的等价关系有:

$F^{m\times n}$中的相抵关系;

$F^{n\times n}$中的相似关系;

$\mathbb{R}^{n\times n}$中的正交相似关系;

$F^{n\times n}$中全体对称矩阵的合同关系;

F上所有线性空间的同构关系;

线性空间V的向量组的等价关系.

$F^{m\times n}$中的相抵关系

《高等代数》课程中的等价关系有:

$F^{m\times n}$中的相抵关系;

$F^{n\times n}$中的相似关系;

$\mathbb{R}^{n\times n}$中的正交相似关系;

$F^{n\times n}$中全体对称矩阵的合同关系;

F上所有线性空间的同构关系;

线性空间V的向量组的等价关系.

$F^{m\times n}$中的相抵关系

《高等代数》课程中的等价关系有:

$F^{m\times n}$中的相抵关系;

$F^{n\times n}$中的相似关系;

$\mathbb{R}^{n\times n}$中的正交相似关系;

$F^{n\times n}$中全体对称矩阵的合同关系;

F上所有线性空间的同构关系;

线性空间V的向量组的等价关系.

$F^{m\times n}$中的相抵关系

《高等代数》课程中的等价关系有:

$F^{m\times n}$中的相抵关系;

$F^{n\times n}$中的相似关系;

$\mathbb{R}^{n\times n}$中的正交相似关系;

$F^{n\times n}$中全体对称矩阵的合同关系;

F上所有线性空间的同构关系;

线性空间V的向量组的等价关系.

$F^{m\times n}$中的相抵关系

《高等代数》课程中的等价关系有:

$F^{m\times n}$中的相抵关系;

$F^{n\times n}$中的相似关系;

$\mathbb{R}^{n\times n}$中的正交相似关系;

$F^{n\times n}$中全体对称矩阵的合同关系;

F上所有线性空间的同构关系;

线性空间V的向量组的等价关系.

$F^{m\times n}$中的相抵关系

《高等代数》课程中的等价关系有:
$F^{m\times n}$中的相抵关系;
$F^{n\times n}$中的相似关系;
$\mathbb{R}^{n\times n}$中的正交相似关系;
$F^{n\times n}$中全体对称矩阵的合同关系;
F上所有线性空间的同构关系;
线性空间V的向量组的等价关系.

命题3 设$A, B\in F^{m\times n}$, 则A相抵于B

$\Leftrightarrow$ A可以经过一系列行和列的初等变换化为B

$\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵$P\in F^{m\times m}$, $Q\in F^{n\times n}$, 使得$A=PBQ$

$\Leftrightarrow$ A, B可分别经过一系列行和列的初等变换化为同一个$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 其中$I_r$是$r$阶单位阵

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)$.

命题3 设$A, B\in F^{m\times n}$, 则A相抵于B

$\Leftrightarrow$ A可以经过一系列行和列的初等变换化为B

$\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵$P\in F^{m\times m}$, $Q\in F^{n\times n}$, 使得$A=PBQ$

$\Leftrightarrow$ A, B可分别经过一系列行和列的初等变换化为同一个$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 其中$I_r$是$r$阶单位阵

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)$.

命题3 设$A, B \in F^{m\times n}$, 则A相抵于B

$\Leftrightarrow$ A可以经过一系列行和列的初等变换化为B

$\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵$P \in F^{m\times m}$, $Q \in F^{n\times n}$, 使得$A = PBQ$

$\Leftrightarrow$ A, B可分别经过一系列行和列的初等变换化为同一个$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 其中$I_r$是$r$阶单位阵

$\Leftrightarrow$ $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$.

命题3 设$A, B \in F^{m\times n}$, 则A相抵于B

$\Leftrightarrow$ A可以经过一系列行和列的初等变换化为B

$\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵$P \in F^{m\times m}$, $Q \in F^{n\times n}$, 使得$A = PBQ$

$\Leftrightarrow$ A, B可分别经过一系列行和列的初等变换化为同一个$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 其中$I_r$是$r$阶单位阵

$\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$.

命题3 设$A, B \in F^{m\times n}$, 则A相抵于B

$\Leftrightarrow$ A可以经过一系列行和列的初等变换化为B

$\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵$P \in F^{m\times m}$, $Q \in F^{n\times n}$, 使得$A = PBQ$

$\Leftrightarrow$ A, B可分别经过一系列行和列的初等变换化为同一个$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 其中$I_r$是$r$阶单位阵

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$.

所以, 在$F^{m\times n}$中的相抵关系是等价关系. 矩阵的秩是相抵关系的完全不变量. 每一类的代表元是$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 按照等价关系可分为$l$类, 这里$l = \min\{m, n\} + 1$.

应用1:矩阵的分解

从矩阵的相抵谈起

林亚南

- 等价关系与等价分类
- $F^{m\times n}$中的相抵关系
- 应用1:矩阵的分解
- 应用2：矩阵的秩的命题的证明
- 矩阵的相抵与线性映射

题1 (1) 设$A\in F^{m\times n}$, 且$\mathrm{rank}(A)=r$. 求证:

$$A=A_1+A_2+\cdots+A_r,$$

这里$\mathrm{rank}(A_i)=1$, $1\le i\le r$.

(2) 设$A,B\in F^{m\times n}$, 且$\mathrm{rank}(A)=r$, $\mathrm{rank}(B)=1$. 求证: 存在可逆阵$P_1,P_2,\cdots,P_r\in F^{m\times m}$和可逆阵$Q_1,Q_2,\cdots,Q_r\in F^{n\times n}$, 使得

$$A=P_1BQ_1+P_2BQ_2+\cdots+P_rBQ_r.$$

应用1:矩阵的分解

题1 (1) 设$A \in F^{m\times n}$, 且$\text{rank}(A) = r$. 求证:

$$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_r,$$

这里$\text{rank}(A_i) = 1$, $1 \le i \le r$.

(2) 设$A, B \in F^{m\times n}$, 且$\text{rank}(A) = r$, $\text{rank}(B) = 1$. 求证: 存在可逆阵$P_1, P_2, \cdots, P_r \in F^{m\times m}$和可逆阵$Q_1, Q_2, \cdots, Q_r \in F^{n\times n}$, 使得

$$A = P_1BQ_1 + P_2BQ_2 + \cdots + P_rBQ_r.$$

题2 设$A\in F^{m\times n}$, $\mathrm{rank}(A)=r$. 求证:

(1) 存在可逆阵$P\in F^{m\times m}$, 使得$PA=\begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix}$, 其中$M\in F^{r\times n}$且$\mathrm{rank}(M)=r$;

(2) 存在可逆阵$Q\in F^{n\times n}$, 使得$AQ=\begin{pmatrix} N & 0 \end{pmatrix}$, 其中$N\in F^{m\times r}$且$\mathrm{rank}(N)=r$;

(3) A相似于$\begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix}$, 其中$M\in F^{r\times n}$且$\mathrm{rank}(M)=r$;

(4) A相似于$\begin{pmatrix} N & 0 \end{pmatrix}$, 其中$N\in F^{m\times r}$且$\mathrm{rank}(N)=r$.

题2 设$A\in F^{m\times n}$, $\mathrm{rank}(A)=r$. 求证:

(1) 存在可逆阵$P\in F^{m\times m}$, 使得$PA=\begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix}$, 其中$M\in F^{r\times n}$且$\mathrm{rank}(M)=r$;

(2) 存在可逆阵$Q\in F^{n\times n}$, 使得$AQ=\begin{pmatrix} N & 0 \end{pmatrix}$, 其中$N\in F^{m\times r}$且$\mathrm{rank}(N)=r$;

(3) A相似于$\begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix}$, 其中$M\in F^{r\times n}$且$\mathrm{rank}(M)=r$;

(4) A相似于$\begin{pmatrix} N & 0 \end{pmatrix}$, 其中$N\in F^{m\times r}$且$\mathrm{rank}(N)=r$.

题2 设$A\in F^{m\times n}$, $\mathrm{rank}(A)=r$. 求证:

(1) 存在可逆阵$P\in F^{m\times m}$, 使得$PA=\begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix}$, 其中$M\in F^{r\times n}$且$\mathrm{rank}(M)=r$;

(2) 存在可逆阵$Q\in F^{n\times n}$, 使得$AQ=\begin{pmatrix} N & 0 \end{pmatrix}$, 其中$N\in F^{m\times r}$且$\mathrm{rank}(N)=r$;

(3) A相似于$\begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix}$, 其中$M\in F^{r\times n}$且$\mathrm{rank}(M)=r$;

(4) A相似于$\begin{pmatrix} N & 0 \end{pmatrix}$, 其中$N\in F^{m\times r}$且$\mathrm{rank}(N)=r$.

题2 设$A\in F^{m\times n}$, $\mathrm{rank}(A)=r$. 求证:

(1) 存在可逆阵$P\in F^{m\times m}$, 使得$PA=\begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix}$, 其中$M\in F^{r\times n}$且$\mathrm{rank}(M)=r$;

(2) 存在可逆阵$Q\in F^{n\times n}$, 使得$AQ=\begin{pmatrix} N & 0 \end{pmatrix}$, 其中$N\in F^{m\times r}$且$\mathrm{rank}(N)=r$;

(3) A相似于$\begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix}$, 其中$M\in F^{r\times n}$且$\mathrm{rank}(M)=r$;

(4) A相似于$\begin{pmatrix} N & 0 \end{pmatrix}$, 其中$N\in F^{m\times r}$且$\mathrm{rank}(N)=r$.

题3 (1) 设$M \in F^{r\times n}$, $\mathrm{rank}(M) = r$. 求证: 存在可逆阵Q, 使得

$$MQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \end{pmatrix};$$

(2) 设$N \in F^{m\times r}$, $\mathrm{rank}(N) = r$. 求证: 存在可逆阵P, 使得

$$PN = \begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix};$$

题3 (1) 设$M \in F^{r\times n}$, $\mathrm{rank}(M) = r$. 求证: 存在可逆阵Q, 使得

$$MQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \end{pmatrix};$$

(2) 设$N \in F^{m\times r}$, $\mathrm{rank}(N) = r$. 求证: 存在可逆阵P, 使得

$$PN = \begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix};$$

(3) 设$A\in F^{r\times n}$, $\mathrm{rank}(A)=r$. 求证: 存在$B\in F^{n\times r}$且$\mathrm{rank}(B)=r$,使得

$$AB=I_r;$$

(4) 设$A\in F^{n\times r}$, $\mathrm{rank}(A)=r$. 求证: 存在$C\in F^{r\times n}$且$\mathrm{rank}(B)=r$, 使得

$$CA=I_r;$$

(5) 问上面的B,C是否唯一?

(3) 设$A\in F^{r\times n}$, $\mathrm{rank}(A)=r$. 求证: 存在$B\in F^{n\times r}$且$\mathrm{rank}(B)=r$,使得

$$AB=I_r;$$

(4) 设$A\in F^{n\times r}$, $\mathrm{rank}(A)=r$. 求证: 存在$C\in F^{r\times n}$且$\mathrm{rank}(B)=r$, 使得

$$CA=I_r;$$

(5) 问上面的B,C是否唯一?

(3) 设$A\in F^{r\times n}$, $\operatorname{rank}(A)=r$. 求证: 存在$B\in F^{n\times r}$且$\operatorname{rank}(B)=r$,使得

$$AB=I_r;$$

(4) 设$A\in F^{n\times r}$, $\operatorname{rank}(A)=r$. 求证: 存在$C\in F^{r\times n}$且$\operatorname{rank}(B)=r$, 使得

$$CA=I_r;$$

(5) 问上面的B,C是否唯一?

题4 (1) 设$A\in F^{m\times n}$. 则$\mathrm{rank}(A)=r \Longleftrightarrow$ 存在$B\in F^{m\times r}$,$C\in F^{r\times m}$且$\mathrm{rank}(B)=\mathrm{rank}(C)=r$, 使得

$$A=BC;$$

(2) 问(1)中的(B,C)是否基本唯一. 即, 如果存在$B_1\in F^{m\times r}$, $C_1\in F^{r\times m}$且$\mathrm{rank}(B_1)=\mathrm{rank}(C_1)=r$,使得$A=B_1C_1$, 是否存在可逆$P\in F^{r\times r}$,使得

$$B_1=BP,\quad C_1=P^{-1}C?$$

题4 (1) 设$A\in F^{m\times n}$. 则$\mathrm{rank}(A)=r \Longleftrightarrow$ 存在$B\in F^{m\times r}$,$C\in F^{r\times m}$且$\mathrm{rank}(B)=\mathrm{rank}(C)=r$, 使得

$$A=BC;$$

(2) 问(1)中的(B,C)是否基本唯一. 即, 如果存在$B_1\in F^{m\times r}$, $C_1\in F^{r\times m}$且$\mathrm{rank}(B_1)=\mathrm{rank}(C_1)=r$,使得$A=B_1C_1$, 是否存在可逆$P\in F^{r\times r}$,使得

$$B_1=BP,\quad C_1=P^{-1}C?$$

(3) 设$A\in F^{m\times n}$. 则$\text{rank}(A)=r \Longleftrightarrow$ 存在r个线性无关的$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\in F^{1\times n}$, r个线性无关的$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r\in F^{m\times 1}$, 使得

$$A=\beta_1\alpha_1+\beta_2\alpha_2+\cdots+\beta_r\alpha_r;$$

(4) 若存在另外r个线性无关的$\alpha_1',\alpha_2',\cdots,\alpha_r'\in F^{1\times n}$, r个线性无关的$\beta_1',\beta_2',\cdots,\beta_r'\in F^{m\times 1}$, 使得

$$A=\beta_1'\alpha_1'+\beta_2'\alpha_2'+\cdots+\beta_r'\alpha_r'$$

求证：向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$与$\alpha_1',\alpha_2',\cdots,\alpha_r'$等价; 向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$与$\beta_1',\beta_2',\cdots,\beta_r'$等价;

(3) 设$A\in F^{m\times n}$. 则$\mathrm{rank}(A)=r\iff$存在r个线性无关的$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\in F^{1\times n}$, r个线性无关的$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r\in F^{m\times 1}$, 使得

$$A=\beta_1\alpha_1+\beta_2\alpha_2+\cdots+\beta_r\alpha_r;$$

(4) 若存在另外r个线性无关的$\alpha_1',\alpha_2',\cdots,\alpha_r'\in F^{1\times n}$, r个线性无关的$\beta_1',\beta_2',\cdots,\beta_r'\in F^{m\times 1}$, 使得

$$A=\beta_1'\alpha_1'+\beta_2'\alpha_2'+\cdots+\beta_r'\alpha_r'$$

求证：向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$与$\alpha_1',\alpha_2',\cdots,\alpha_r'$等价; 向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$与$\beta_1',\beta_2',\cdots,\beta_r'$等价;

题5 设$A\in F^{n\times n}$. 求证:

(1) $A=BC=DE$, 这里$B^2=B$, $E^2=E$, C,D是n阶可逆阵;

(2) A可经过一系列行的(或列的)初等变换化为幂等阵;

(3) A可经过一系列行的(或列的)初等变换化为对称阵.

题5　设$A\in F^{n\times n}$. 求证:

(1) $A=BC=DE$, 这里$B^2=B$, $E^2=E$, C,D是n阶可逆阵;

(2) A可经过一系列行的(或列的)初等变换化为幂等阵;

(3) A可经过一系列行的(或列的)初等变换化为对称阵.

题5 设$A \in F^{n\times n}$. 求证:

(1) $A = BC = DE$, 这里$B^2 = B$, $E^2 = E$, C, D是n阶可逆阵;

(2) A可经过一系列行的(或列的)初等变换化为幂等阵;

(3) A可经过一系列行的(或列的)初等变换化为对称阵.

题6 (1) 设$A\in F^{n\times n}$, $\mathrm{rank}(A)=r$. 求证:存在$B\in F^{n\times n}$且$\mathrm{rank}(B)=n-r$, 使得$AB=0$;

(2) 设$A\in F^{n\times n}$, $\mathrm{rank}(A)=r$. 求证:存在$B\in F^{n\times n}$且$\mathrm{rank}(B)=n-r$, 使得$AB=BA=0$;

(3) 设$A,B\in F^{n\times n}$, $\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)\le n$. 求证: 存在可逆阵$M\in F^{n\times n}$, 使得$AMB=0$;

题6 (1) 设$A\in F^{n\times n}$, $\mathrm{rank}(A)=r$. 求证:存在$B\in F^{n\times n}$且$\mathrm{rank}(B)=n-r$, 使得$AB=0$;

(2) 设$A\in F^{n\times n}$, $\mathrm{rank}(A)=r$. 求证:存在$B\in F^{n\times n}$且$\mathrm{rank}(B)=n-r$, 使得$AB=BA=0$;

(3) 设$A,B\in F^{n\times n}$, $\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)\le n$. 求证: 存在可逆阵$M\in F^{n\times n}$, 使得$AMB=0$;

题6 (1) 设$A\in F^{n\times n}$, $\mathrm{rank}(A)=r$. 求证:存在$B\in F^{n\times n}$且$\mathrm{rank}(B)=n-r$, 使得$AB=0$;

(2) 设$A\in F^{n\times n}$, $\mathrm{rank}(A)=r$. 求证:存在$B\in F^{n\times n}$且$\mathrm{rank}(B)=n-r$, 使得$AB=BA=0$;

(3) 设$A,B\in F^{n\times n}$, $\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)\le n$. 求证: 存在可逆阵$M\in F^{n\times n}$, 使得$AMB=0$;

(4) 设$A \in F^{n\times n}$. 求解矩阵方程$AXA = A$;

(5) (4)中的解是否唯一? 什么条件下唯一?

(6) $A \in F^{n\times n}$, $\mathrm{rank}(A) = r$. 求证: 存在$B \in F^{n\times n}$且$\mathrm{rank}(B) = n - r$, 使得$A + B$为可逆阵;

(7) $A \in F^{n\times n}$, $\mathrm{rank}(A) = r$. 求证: 存在$B, C \in F^{n\times n}$且$\mathrm{rank}(B) = \mathrm{rank}(C) = r$, 使得$AB = CA$.

(4) 设$A \in F^{n\times n}$. 求解矩阵方程$AXA = A$;

(5) (4)中的解是否唯一? 什么条件下唯一?

(6) $A \in F^{n\times n}$, $\mathrm{rank}(A) = r$. 求证: 存在$B \in F^{n\times n}$且$\mathrm{rank}(B) = n - r$, 使得$A + B$为可逆阵;

(7) $A \in F^{n\times n}$, $\mathrm{rank}(A) = r$. 求证: 存在B, $C \in F^{n\times n}$且$\mathrm{rank}(B) = \mathrm{rank}(C) = r$, 使得$AB = CA$.

(4) 设$A\in F^{n\times n}$. 求解矩阵方程$AXA=A$;

(5) (4)中的解是否唯一? 什么条件下唯一?

(6) $A\in F^{n\times n}$, $\mathrm{rank}(A)=r$. 求证: 存在$B\in F^{n\times n}$且$\mathrm{rank}(B)=n-r$, 使得$A+B$为可逆阵;

(7) $A\in F^{n\times n}$, $\mathrm{rank}(A)=r$. 求证: 存在B, $C\in F^{n\times n}$且$\mathrm{rank}(B)=\mathrm{rank}(C)=r$, 使得$AB=CA$.

(4) 设$A\in F^{n\times n}$. 求解矩阵方程$AXA=A$;

(5) (4)中的解是否唯一? 什么条件下唯一?

(6) $A\in F^{n\times n}$, $\mathrm{rank}(A)=r$. 求证: 存在$B\in F^{n\times n}$且$\mathrm{rank}(B)=n-r$, 使得$A+B$为可逆阵;

(7) $A\in F^{n\times n}$, $\mathrm{rank}(A)=r$. 求证: 存在B, $C\in F^{n\times n}$且$\mathrm{rank}(B)=\mathrm{rank}(C)=r$, 使得$AB=CA$.

应用2: 矩阵的秩的命题的证明

题7 设$A \in F^{m\times n}, B \in F^{n\times l}$, 则
$$\operatorname{rank}(AB) \le \min\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\}.$$

题8 $\operatorname{rank}(A+B) \le \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B).$

题9 $\operatorname{rank}(AB) \ge \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) - n,$
这里$A \in F^{m\times n}, B \in F^{n\times l}.$

题10 $\operatorname{rank}(ABC) \ge \operatorname{rank}(AB) + \operatorname{rank}(BC) - \operatorname{rank}(B).$

矩阵的相抵与线性映射

命题4 设 V 是数域 F 上 n 维线性空间, $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 和$\xi_1',\xi_2',\cdots,\xi_n'$是$V$的基且

$$(\xi_1',\xi_2',\cdots,\xi_n')=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)P.$$

设W是m维线性空间, $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m$和$\eta_1',\eta_2',\cdots,\eta_m'$是$W$ 的基且

$$(\eta_1',\eta_2',\cdots,\eta_m')=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)Q.$$

设φ是V到W的线性映射,且

$$\varphi(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)A_{m\times n},$$

$$\varphi(\xi_1',\xi_2',\cdots,\xi_n')=(\eta_1',\eta_2',\cdots,\eta_m')B_{m\times n}.$$

则$B=Q^{-1}AP$,即A相抵于B.

命题5 设$A,B\in F^{m\times n}$, A相抵于B. 即存在m阶可逆阵Q和n阶可逆阵P使得$B=Q^{-1}AP$. 设V是数域F上n维线性空间，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是V的基. 设W是m维线性空间，$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m$是$W$的基. 设$\varphi$是$V$到$W$的线性映射,且

$$\varphi(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)A_{m\times n}.$$

令$\xi_1',\xi_2',\cdots,\xi_n'$是$V$的另一组基,使得

$$(\xi_1',\xi_2',\cdots,\xi_n')=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)P.$$

$\eta_1',\eta_2',\cdots,\eta_m'$是$W$的另一组基,使得

$$(\eta_1',\eta_2',\cdots,\eta_m')=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)Q.$$

则

$$\varphi(\xi_1',\xi_2',\cdots,\xi_n')=(\eta_1',\eta_2',\cdots,\eta_m')B_{m\times n}.$$

注 设$A, B \in F^{m\times n}$. 上面命题4和命题5说明, A相抵于B的充分必要条件是A和B是n维线性空间到m维线性空间的同一个线性映射在不同基下的矩阵.

特别地, 设$A, B \in F^{n\times n}$, A相似于B的充分必要条件是A和B是n维线性空间的同一个线性变换在不同基下的矩阵.

由于A总相抵于标准型$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 所以我们有

命题6 设φ是n维线性空间V到m维线性空间W的线性映射. 则存在V的一组基$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$, W的一组基$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m$, 使得

$$\varphi(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m)\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

题11 设φ是n维线性空间V到m维线性空间W的线性映射. 求证:

(1) $\dim\mathrm{Im}(\varphi)+\dim\mathrm{Ker}(\varphi)=n$;

(2) φ是单的线性映射$\Leftrightarrow r=n$;

(3) φ是满的线性映射$\Leftrightarrow r=m$.

题11 设φ是n维线性空间V到m维线性空间W的线性映射. 求证:

(1) $\dim \mathrm{Im}(\varphi)+\dim \mathrm{Ker}(\varphi)=n$;

(2) φ是单的线性映射$\Leftrightarrow r=n$;

(3) φ是满的线性映射$\Leftrightarrow r=m$.

题11 设φ是n维线性空间V到m维线性空间W的线性映射. 求证:

(1) $\dim \mathrm{Im}(\varphi)+\dim \mathrm{Ker}(\varphi)=n$;

(2) φ是单的线性映射$\Leftrightarrow r=n$;

(3) φ是满的线性映射$\Leftrightarrow r=m$.

题12 设V, U是有限维线性空间, $\varphi: V\to U$是线性映射. 证明:

(1) 存在有限维线性空间W与满的线性映射$\psi: V\to W$, 单的线性映射$\sigma: W\to U$, 使得$\varphi=\sigma\psi$;

(2) (1)中的分解在同构意义下是唯一的. 即: 若存在另一个有限维线性空间W_1与满的线性映射$\psi_1: V\to W_1$, 单的线性映射$\sigma_1: W_1\to U$, 使得$\varphi=\sigma_1\psi_1$, 则存在线性空间同构$\theta: W\to W_1$, 使得$\theta\varphi=\varphi_1$, $\sigma_1\theta=\sigma$.

题12 设V, U是有限维线性空间, $\varphi : V \to U$是线性映射. 证明:

(1) 存在有限维线性空间W与满的线性映射$\psi : V \to W$, 单的线性映射$\sigma : W \to U$, 使得$\varphi = \sigma\psi$;

(2) (1)中的分解在同构意义下是唯一的. 即: 若存在另一个有限维线性空间W_1与满的线性映射$\psi_1 : V \to W_1$, 单的线性映射$\sigma_1 : W_1 \to U$, 使得$\varphi = \sigma_1\psi_1$, 则存在线性空间同构$\theta : W \to W_1$, 使得$\theta\varphi = \varphi_1$, $\sigma_1\theta = \sigma$.

题13 设φ是n维线性空间V到m维线性空间W的线性映射. 求证: $V = V_1 \oplus V_2$, 其中$V_1 \cong \mathrm{Im}\varphi$, $V_2 = \mathrm{Ker}\varphi$.

题14 设φ是n维线性空间V的线性变换. 求证: $\varphi = \psi\theta$, 其中ψ, θ是线性变换, $\psi^2 = \psi$且θ是可逆线性变换.

题13 设φ是n维线性空间V到m维线性空间W的线性映射. 求证: $V = V_1 \oplus V_2$, 其中$V_1 \cong \mathrm{Im}\varphi$, $V_2 = \mathrm{Ker}\varphi$.

题14 设φ是n维线性空间V的线性变换. 求证: $\varphi = \psi\theta$, 其中ψ, θ是线性变换, $\psi^2 = \psi$且θ是可逆线性变换.

$$\mathit{Thank\quad you!}$$